

Απολυτήριες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης**

Ημ/νία: 19 Μαΐου 2010

**Απαντήσεις Θεμάτων**

## Θέμα Α

**A1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 304.

**A2.** Ορισμός, στη σελίδα 279 σχολικού βιβλίου.

**A3.** Ορισμός, στη σελίδα 273 σχολικού βιβλίου.

**A4.** α. Σ    β. Σ    γ. Λ    δ. Λ    ε. Σ

## Θέμα Β

**B1.** Για τον μιγαδικό  $z$  είναι:  $z + \frac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$$

Οπότε, οι λύσεις είναι:  $z_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$ , δηλαδή:  $z_1 = 1 + i$  και  $z_2 = 1 - i$ .

**B2.** Για τους μιγαδικούς  $z_1, z_2$  είναι:

$$\begin{aligned} z_1^{2010} + z_2^{2010} &= (1 + i)^{2010} + (1 - i)^{2010} \\ &= (i(1 - i))^{2010} + (1 - i)^{2010} = i^{2010}(1 - i)^{2010} + (1 - i)^{2010} \\ &= -(1 - i)^{2010} + (1 - i)^{2010} = 0, \text{ αφού } i^{2010} = i^2 = -1 \end{aligned}$$

**B3.** Για τους μιγαδικούς  $z_1, z_2, w$  έχουμε:

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |w - 4 + 3i| = |2i| \Leftrightarrow |w - 4 + 3i| = 2$$

$$\Leftrightarrow |w - (4 - 3i)| = 2$$

Η σχέση που ισχύει για το μέτρο του μιγαδικού  $w$  είναι της μορφής  $|w - w_0| = 2$ , όπου  $w_0 = 4 - 3i$ . Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $w$  είναι κύκλος κέντρου  $K(4, -3)$  και ακτίνας  $\rho = 2$ .

### (2<sup>ος</sup> τρόπος)

Θεωρώντας:  $w = x + yi$  παίρνουμε:

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |w - 4 + 3i| = |2i| \Leftrightarrow |w - 4 + 3i| = 2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow |x + yi - 4 + 3i| = 2 \Leftrightarrow |(x - 4) + (y + 3)i| = 2 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4 \quad (2)$$

Επομένως, η εξίσωση (2) παριστάνει κύκλο κέντρου  $K(4, -3)$  και ακτίνας  $\rho = 2$ .

**B4.** Για το μέτρο του  $w$  ισχύει:  $(OK) - \rho \leq |w| \leq (OK) + \rho$ ,

όπου:  $(OK) = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$  με  $O(0,0)$  και  $K(4,-3)$  το κέντρο του κύκλου.

Επομένως είναι:  $5 - \rho \leq |w| \leq \rho + 5 \Leftrightarrow 3 \leq |w| \leq 7$ .

**(2<sup>ος</sup> τρόπος)**

Είναι:  $|w| = |w + (-4 + 3i) - (-4 + 3i)|$ . Οπότε, από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} ||w + (-4 + 3i)| - |-4 + 3i|| &\leq |w + (-4 + 3i) - (-4 + 3i)| \leq |w + (-4 + 3i)| + |-4 + 3i| \\ \Leftrightarrow |2 - 5| &\leq |w| \leq 2 + 5 \Leftrightarrow 3 \leq |w| \leq 7, \text{ χρησιμοποιώντας τη σχέση (1)}. \end{aligned}$$

**Θέμα Γ**

**Γ1.** Η  $f$  ορίζεται στο  $A = \mathbb{R}$ , εφόσον  $x^2 + 1 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Είναι παραγωγίσιμη στο  $A = \mathbb{R}$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για την παράγωγο της  $f$  έχουμε:

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1} > 0, \quad \text{αφού για το τριώνυμο } x^2 + x + 1 \text{ είναι } \Delta < 0.$$

Συνεπώς, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A = \mathbb{R}$ .

**Γ2.** Για την εξίσωση ισοδύναμα έχουμε:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left(\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right)$$

$$2x^2 + 2(2 - 3x) = \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln[x^4 + 1]$$

$$2x^2 + \ln[x^4 + 1] = 2(3x - 2) + \ln[(3x - 2)^2 + 1]$$

$$f(x^2) = f(3x - 2), \quad (1)$$

Επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , θα έχει και την ιδιότητα «1-1».

Οπότε, από την εξίσωση (1) ισοδύναμα παίρνουμε:

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$$

**Γ3.** Η συνάρτηση  $f'$  είναι παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = \left(2 + \frac{2x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{2x^2 - 4x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Θέτουμε  $f''(x) = 0$  οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$$\frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Αντίστοιχα, λύνουμε την ανίσωση:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της  $f''(x)$  και κυρτότητας της  $f$ .

	$-\infty$	$-1$	$+1$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	○	+	○	-
$f$	∩		∪		∩

Άρα η  $C_f$  έχει δύο σημεία καμπής:  $B(-1, \ln 2 - 2)$  και  $\Gamma(1, \ln 2 + 2)$ .

Έστω  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  οι εφαπτόμενες της  $C_f$  στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα.

Για τους συντελεστές διεύθυνσής τους ισχύουν:  $\lambda_{\varepsilon_1} = f'(-1) = 1$

$\lambda_{\varepsilon_2} = f'(1) = 3$ . Οπότε οι εξισώσεις των ευθειών είναι:

$$\varepsilon_1: y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y - (\ln 2 - 2) = (x + 1) \Leftrightarrow y = x - 1 + \ln 2$$

$$\varepsilon_2: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - (\ln 2 + 2) = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 1 + \ln 2$$

Για το σημείο τομής των ευθειών έχουμε:

$$\begin{cases} y = x - 1 + \ln 2 \\ y = 3x - 1 + \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 + \ln 2 \\ y = 3x - 1 + \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + \ln 2 \end{cases}$$

Δηλαδή το σημείο τομής είναι  $\Delta(0 - 1 + \ln 2)$  που βρίσκεται στον άξονα  $y'y$ .

**Γ4.** Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος έχουμε:

$$I = \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 2x^2 + x \ln(x^2 + 1) dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx + \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx = I_1 + I_2$$

Είναι:

$$I_1 = \int_{-1}^1 2x^2 dx = \left[ \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} - \frac{(-2)}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{και } I_2 = \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 1)' \ln(x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 2x dx = 0 - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0$$

$$\text{Άρα: } I = I_1 + I_2 = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

**Παρατήρηση:** Η συνάρτηση  $g(x) = x \ln(x^2 + 1)$ ,  $x \in [-1, 1]$  είναι περιττή, οπότε αμέσως συμπεραίνουμε ότι:  $I_2 = 0$ .

## Θέμα Δ

**Δ1.** Για τη συνάρτηση  $f$  ισοδύναμα έχουμε:

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt \quad (1)$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt + x + 3$$

Επειδή η συνάρτηση  $\varphi(t) = \frac{t}{f(t)-t}$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , η συνάρτηση  $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t} dt$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t} dt$  και  $x - 3$  με:

$$f'(x) = \frac{x}{f(x) - x} + 1 = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Δ2. Είναι:**  $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x)$$

$$g'(x) = 2f'(x)[f(x) - x] - 2f(x)$$

$$g'(x) = \frac{2f(x)}{f(x)-x} \cdot [f(x) - x] - 2f(x)$$

$g'(x) = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα η  $g$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ3.** Άρα υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  για τον οποίο ισχύει  $g(x) = c$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$(f(x))^2 - 2xf(x) = c \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

Η (1) για  $x = 0$  δίνει:  $f(0) = 3$

Η (2) για  $x = 0$  δίνει:  $(f(0))^2 = c \Leftrightarrow c = 9$

Άρα ισχύει  $(f(x))^2 - 2xf(x) = 9$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$(f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = 9 + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$(f(x) - x)^2 = x^2 + 9, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Ισχύει:  $h(x) = f(x) - x \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

και επειδή η συνάρτηση  $h(x) = f(x) - x$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

Αφού  $h(0) = f(0) = 3$  ισχύει:  $h(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Η (3) γράφεται:  $(h(x))^2 = x^2 + 9$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = +\sqrt{x^2 + 9}$$

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**Δ4.** Είναι:  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$

Άρα ισχύει:  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $x < x + 1 < x + 2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση συνάρτηση:  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , με  $x \in \mathbb{R}$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την  $F$  στο  $[x, x + 1]$  υπάρχει  $\xi_1 \in (x, x + 1)$ :

$$F'(\xi_1) = F(x + 1) - F(x)$$

$$f(\xi_1) = \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την  $F$  στο  $[x + 1, x + 2]$  υπάρχει  $\xi_2 \in (x + 1, x + 2)$ :

$$F'(\xi_2) = F(x + 2) - F(x + 1)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 9}} > 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Άρα για  $\xi_1 < \xi_2$  ισχύει:  $f(\xi_1) < f(\xi_2)$

$$\int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt < \int_0^{x+2} f(t) dt - \int_0^{x+1} f(t) dt$$

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+2}^{x+1} f(t) dt \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

## (2<sup>ος</sup> τρόπος)

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $x < x + 1$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση:  $G(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$ , με  $x \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$G(x) = \int_0^{x+1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:  $G'(x) = f(x+1) - f(x)$

Οπότε για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , με  $x < x + 1$ , επειδή η  $f$  είναι αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει:

$$f(x) < f(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) > 0 \Leftrightarrow G'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η  $G$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Συνεπώς για  $x < x + 1$  είναι:  $G(x) < G(x+1)$ . Άρα:  $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

## (3<sup>ος</sup> τρόπος)

Για κάθε  $t$  με  $x \leq t \leq x + 1$ , ισχύει  $f(x) \leq f(t) \leq f(x + 1)$ , αφού  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Οπότε ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $[x, x + 1]$  παίρνουμε:

$$\int_x^{x+1} f(x)dt < \int_x^{x+1} f(t)dt < \int_x^{x+1} f(x+1)dt,$$

αφού οι διαφορές  $f(x) - f(t)$  και  $f(x + 1) - f(t)$

δεν είναι παντού μηδέν στα διαστήματα  $[x, x + 1]$  και  $[x + 1, x + 2]$ .

Άρα έχουμε:  $f(x) \int_x^{x+1} 1 dt < \int_x^{x+1} f(t)dt < f(x + 1) \int_x^{x+1} 1 dt$

$$f(x) < \int_x^{x+1} f(t)dt < f(x + 1), \quad (1)$$

Επίσης, για κάθε  $t$  με:  $x + 1 \leq t \leq x + 2$ , ισχύει  $f(x + 1) \leq f(t) \leq f(x + 2)$

Ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $[x + 1, x + 2]$  ομοίως προκύπτει:

$$f(x + 1) < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt < f(x + 2) \quad (2)$$

Άρα από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$$

**Επιμέλεια:** Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Ηρώ Μαρκάκη