MEΘΟΔΙΚΟ

Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας**,

Ημ/νία: 14 Μαίου 2011

Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. **152**

Α2. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. **142**

Α3. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. **65**

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω: Α το ενδεχόμενο η σφαίρα να είναι άσπρη,

Κ το ενδεχόμενο η σφαίρα να είναι κόκκινη,

και Μ το ενδεχόμενο η σφαίρα να είναι μαύρη.

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα έχουμε ότι:

$P(M) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\Omega) = 4N(M) \quad (1)$

Αλλά γνωρίζουμε ότι: $64 < N(\Omega) < 72$ και επειδή το μοναδικό πολλαπλάσιο του 4 στο διάστημα $(64, 72)$ είναι το 68, προκύπτει ότι: $N(\Omega) = 68$.

Β' τρόπος: $64 < N(\Omega) < 72 \Leftrightarrow 16 < N(M) < 18$, λόγω της σχέσης (1)

Όμως: $N(M) \in \mathbb{N}$. Άρα: $N(M) = 17$.

Β2. Ισχύει: $P(A) + P(K) + P(M) = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$ ή $\lambda = 1$

Η τιμή $\lambda = 1$ απορρίπτεται γιατί τότε: $P(A) = 4 > 1$ αδύνατο. Άρα: $\lambda = \frac{1}{4}$

Β3. Από τη σχέση (1) παίρνουμε: $N(M) = \frac{1}{4}N(\Omega) = 17$.

Επίσης, για $\lambda = 1$ έχουμε:

$$P(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(A) = \frac{68}{4} \Leftrightarrow N(A) = 17$$

$$P(K) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow N(K) = \frac{68}{2} \Leftrightarrow N(K) = 34$$

Άρα το κουτί περιέχει: 17 άσπρες, 34 κόκκινες και 17 μαύρες σφαίρες.

Β4. Επειδή, τα ενδεχόμενα Α και Μ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στον οριζόντιο άξονα, θα ισχύει: $y_\Delta = y_E$ (1).

Για τη μέση τιμή σε χιλιάδες ευρώ ισχύει:

$$\bar{X} = 14{,}2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i = 14{,}2$$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot 0{,}1 + 12 \cdot 0{,}2 + 14 \cdot \frac{y_\Delta}{100} + 16 \cdot \frac{y_E}{100} + 18 \cdot 0{,}1 = 14{,}2$$

$\Leftrightarrow 100 + 240 + 14y_\Delta + 16y_\Delta + 180 = 1420$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1)

$$\Leftrightarrow 30 \cdot y_\Delta = 900 \Leftrightarrow y_\Delta = 30.$$

Επίσης, από τη σχέση (1) προκύπτει: $y_E = 30$.

Β' τρόπος: Το ερώτημα αυτό λύνεται εναλλακτικά, χωρίς τη χρήση του δεδομένου της μέσης τιμής, δηλαδή ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{5} f_i = 1 \Leftrightarrow 0{,}1 + 0{,}2 + \frac{y_\Delta}{100} + \frac{y_E}{100} + 0{,}1 = 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2\, y_\Delta = 60 \Leftrightarrow y_\Delta = 30$$

Επίσης, από τη σχέση (1) προκύπτει: $y_E = 30$.

Γ2. Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων:

Γ3. Γνωρίζουμε ότι τα κέντρα των κλάσεων διαφέρουν κατά το πλάτος των κλάσεων c. Οπότε: $c = x_2 - x_1 = 2$.

Με βάση τα δεδομένα, έχουμε τον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Κλάσεις	**Κεντρικές Τιμές (x_i)**	**Σχετικές Συχνότητες (f_i %)**
[9,11)	10	10
[11,13)	12	20
[13,15)	14	30
[15,17)	16	30
[17,19)	18	10
	Σύνολο	100

Γ4. Το 30% των πωλητών έχει πραγματοποιήσει πωλήσεις που ανήκουν στο διάστημα [15,17) χιλιάδες ευρώ και το 10% των πωλητών έχει πραγματοποιήσει πωλήσεις που ανήκουν στο διάστημα [17,19) χιλιάδες ευρώ.

Συνολικά, το ποσοστό των πωλητών που είχαν πωλήσεις τουλάχιστον 15 χιλιάδων ευρώ και θα πάρουν το επιπλέον εφάπαξ ποσό είναι 40%.

Γ5. Θεωρώντας στο πολύγωνο συχνοτήτων ως μονάδα μέτρησης του οριζόντιου άξονα τη μονάδα, το εμβαδό που περικλείεται από το πολύγωνο και τον οριζόντιο άξονα, ισούται με το μέγεθος ν του δείγματος. Άρα, η εταιρία έχει 80 πωλητές και κατά συνέπεια το επιπλέον εφάπαξ ποσό δικαιούνται:

$\nu_4 + \nu_5 = \nu \cdot (f_4 + f_5) = 80 \cdot 0{,}4 = 32$ πωλητές

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}$ με $A_f=\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\left[\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{3}\,x\left(2x-\frac{11}{10}\right)\right]$$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\left(3x^2-\frac{22}{10}x+\frac{2}{5}\right)$$

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x)=0$

$3x^2-\frac{22}{10}x+\frac{2}{5}=0,$ αφού: $e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}>0$

$30x^2-22x+4=0,$ με $\Delta=4$

Άρα οι λύσεις είναι: $x=\frac{22+2}{60}=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$ ή $x=\frac{22-2}{60}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

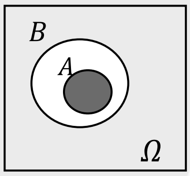
Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	$1/3$		$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		τ.μεγ.		τ.ελ.	

Δ2. Επειδή: $A\subseteq B$ είναι: $P(A)\le P(B)$.

Από το προηγούμενο (Δ1) ερώτημα είναι: $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(B)=\frac{2}{5}$

Αφού: $A\subseteq B$ θα ισχύει: $A\cap B=A$ και $A\cup B=B$



Άρα: $P(A\cap B)=P(A)$ $\qquad P(A\cup B)=P(B)$

$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$ $\qquad P(A\cup B)=\frac{2}{5}$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$$

Δ3. α. Για την εξίσωση: $f(x)=h(x)$ ισοδύναμα έχουμε:

$$e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{1}{3}\,x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}\,x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)$$

$$x\left[\frac{x^2}{2}-\frac{11}{30}x+\frac{2}{15}-\frac{3x^2}{10}+\frac{x}{5}+\frac{1}{15}\right]=0$$

$$x(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=3$$

β. Αφού $x_1<x_2<x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης έχουμε:

$x_1=0$ και $\nu_1=2\cdot 0+1=1$

$x_2=2$ και $\nu_2=2\cdot 2+1=5$

$x_3=3$ και $\nu_3=2\cdot 3+1=7$

Αρα για τη μέση τιμή είναι:

$$\bar{x}=\frac{1\cdot 0+2\cdot 5+3\cdot 7}{13}=\frac{31}{13}$$

Επιμέλεια: Γιάννης, Μερτίκας, Μάριος Παπαδιαμαντής, Ηρώ Μαρκάκη