Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης** ,

Ημ/νία: 16 Μαίου 2011

Απαντήσεις Θεμάτων

Θεμα Α

Α1. Θεωρία από το σχολικό βιβλίο (Θεώρημα Fermat)

Α2. Θεωρία από το σχολικό βιβλίο (Ορισμός ασύμπτωτης)

Α3. α. Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ

Θεμα Β

Β1. Για το μιγαδικό z ισοδύναμα έχουμε:

$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2$

$|z-3i|+|\overline{z-3i}|=2$

$|z-3i|+|z-3i|=2$

$2|z-3i|=2$

$|z-3i|=1 \quad (1)$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Β2. Από τη σχέση (1) ισοδύναμα έχουμε:

$|z-3i|^2=1$

$(z-3i)(\overline{z-3i})=1$

$(z-3i)(\bar{z}+3i)=1$

$\bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}, \quad (2)$ αφού $z\neq 3i$

Β3. Για το μιγαδικό w έχουμε:

$w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i}=z-3i+\bar{z}+3i=z+\bar{z}=2\,Re(z)\in\mathbb{R},$ με χρήση της (2)

Οπότε: $|w|=|z-3i+\overline{z-3i}|\leq|z-3i|+|\overline{z-3i}|=2$

Άρα $|w|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq w\leq 2,$ αφού $w\in\mathbb{R}$.

Β4. Είναι:

$$|z-w| = \left|z-\left(z-3i+\frac{1}{z-3i}\right)\right| = \left|3i-\frac{1}{z-3i}\right| = |3i-(\bar{z}+3i)| = |-\bar{z}| = |z|$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση (2).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τη σχέση :

$$e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + x f''(x) \qquad (1)$$

ισοδύναμα παίρνουμε

$$(e^x - 1)f'(x) + (e^x - x)f''(x) = e^x$$

$$[(e^x - x)f'(x)]' = (e^x)'$$

Άρα υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ ώστε: $(e^x - x)f'(x) = e^x + c_1 \qquad (2)$

Για $x = 0$ έχουμε $1 \cdot f'(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1$, αφού $f'(0) = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^x - 1$. Έχουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων

		0	
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
g	↘		↗

Η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ το $g(0) = 1$.
Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 1$.

Δηλαδή $g(x) = e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή η σχέση (2) γράφεται : $(e^x - x)f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$, αφού $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x}$$

$$f'(x) = [\ln(e^x - x)]'$$

Άρα υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε: $f(x) = \ln(e^x - x) + c_2$.

Για $x = 0$ παίρνουμε: $f(0) = \ln 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$, αφού $f(0) = 0$.

Άρα $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά και σύνθεση με :

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$,

και την ανίσωση $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{g(x)} > 0$

$\Leftrightarrow\ e^x > 1$, αφού $g(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x > 0$.

Έχουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων

	$-$ 0 $+$
$f'(x)$	$-$ $\circ$ $+$
f	$\searrow$ $\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty\,, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0\,, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

Λύνουμε την εξίσωση $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - xe^x - 1 = 0 \quad (3)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2e^x - xe^x - 1$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x$

$$h'(x) = (1 - x)e^x$$

Θέτουμε $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Άρα προκύπτει ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων για την h .

	$-\infty$ 1 $+\infty$
$h'(x)$	$+$ $\circ$ $-$
$h(x)$	$\nearrow$ Ο.Μ. $\searrow$

Η h παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$ το $h(1) = 2e - e - 1$

$\Leftrightarrow h(1) = e - 1 > 0$.

Επίσης : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}[(2-x)e^x - 1] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2-x}{e^{-x}} - 1\right) = -1$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x}{e^{-x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) D.L.H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^x - 1 = -\infty$

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$

$h(\Delta_1) = h\big((-\infty,1]\big) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} h(x),\ h(1)\right] = (-\infty, e-1]$

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [1,+\infty)$

$h(\Delta_2) = h([1,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} h(x),\ h(1)\right] = (-\infty, e-1]$

Επειδή $0 \in h(\Delta_1)$ και η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση x_1 στο $(-\infty, 1)$, αφού $h(1) \neq 0$.

Αντίστοιχα, επειδή $0 \in h(\Delta_2)$ και η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση x_2 στο $(1,+\infty)$ αφού $h(1) \neq 0$.

Για $x < x_1$ είναι: $h(x) < h(x_1) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$
ενώ για $1 > x > x_1$ είναι $h(x) > h(x_1) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$.
Δηλαδή η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = x_1$.

Αντίστοιχα, για $1 < x < x_2$ είναι $h(x) > h(x_2) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$
και για $x > x_2$ είναι: $h(x) < h(x_2) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$.
Δηλαδή η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = x_2$.
Συνοπτικά, έχουμε τον παρακάτω πίνακα :

x		x_1	1	x_2	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	σ.κ	$\cup$	σ.κ	$\cap$

Άρα η f παρουσιάζει δύο ακριβώς σημεία καμπής στις θέσεις $x = x_1$ και $x = x_2$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x$ με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.
Είναι $\varphi(0) = -1$
και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ (ερώτημα Γ1)

Παρατηρούμε ότι $\varphi(0)\cdot\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Επομένως, από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $\varphi'(x)=\frac{e^x-x}{e^x-1}+\eta\mu x$

$\varphi'(x)=f'(x)+\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ γιατί

$f'(x)>0$ για $x>0$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς η ρίζα x_0 είναι μοναδική .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}\,dt \quad (1)$$

Στην παραπάνω ισότητα, θέτουμε: $u=x+t\Leftrightarrow t=u-x$

Οπότε: $du=(x+t)'dt\Leftrightarrow du=dt,$ ενώ για τα άκρα της ολοκλήρωσης:

όταν $t=0$ είναι $u=x$ και όταν $t=-x$ είναι $u=0$.

Η (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}\,du$$

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-e^{-2x}\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}\,du$$

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\frac{1}{e^{2x}}\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}\,du$$

$$1-f(x)=-\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}\,du$$

$$f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}\,du$$

Για τη συνάρτηση f παρατηρούμε ότι: $f(0)=1$.

Όμοια προκύπτει:

$$g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}\,du$$

Για τη συνάρτηση g παρατηρούμε ότι: $g(0)=1$.

Επειδή η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο και σύνθεση συνεχών οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Παραγωγίζοντας παίρνουμε:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

και $$g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και ισοδύναμα παίρνουμε:

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_1, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ παίρνουμε: $c_1 = 1$.

Άρα ισχύει: $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Η σχέση (2) γράφεται:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$2\, f(x)\, f'(x) = 2\, e^{2x}, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\left(f^2(x)\right)' = (e^{2x})'$$

Άρα υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε: $f^2(x) = e^{2x} + c_2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$ δίνει: $1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Άρα ισχύει: $[f(x)]^2 = e^{2x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (3)

Επειδή ισχύει $e^{2x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Αφού $f(1) = 1 > 0$, θα ισχύει $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα λόγω της σχέσης (3) ισχύει: $f(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{u\to -\infty} \frac{\frac{1}{u}}{e^u}, \qquad \text{θέτοντας } u = \frac{1}{x}, \text{όταν } x \to 0^-, \text{τότε } u \to -\infty$$

$$= \lim_{u\to -\infty} \frac{1}{u\, e^u} = -\infty$$

αφού:

$$\lim_{u\to -\infty} (u\, e^u) = \lim_{u\to -\infty} \frac{u}{e^{-u}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) D.L.H}{=} -\lim_{u\to -\infty} \frac{1}{e^{-u}} = -\lim_{u\to -\infty} e^u = 0$$

και $u\, e^u < 0$ σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$, με $\alpha < 0$.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_0^1 |F(x)|\ dx \quad (1) F(x) = \int_1^x f(t^2)\, dt \ \ x \in \mathbb{R} \ \text{ με } \ F(1) = 0$$

$F'(x) = f(x^2) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x < 1$ είναι: $F(x) < F(1) \Leftrightarrow F(x) < 0$

Για κάθε $x \in [0\,,1]$ ισχύει: $F(x) \leq 0$

Άρα: $E = -\int_0^1 F(x)\ dx$

$$E = -\int_0^1 (x)'\ F(x)\, dx$$

$$E = -[x\, F(x)]_0^1 + \int_0^1 x\ f(x^2)\, dx$$

$$E = \int_0^1 x\ e^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x^2}\right)' dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2} \ \text{τ.μ.}$$

Επιμέλεια: Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Μάριος Παπαδιαμαντής, Ηρώ Μαρκάκη