Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας**,

Ημ/νία: **30 Μαΐου 2014**

Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 30

Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 13

Α3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 59

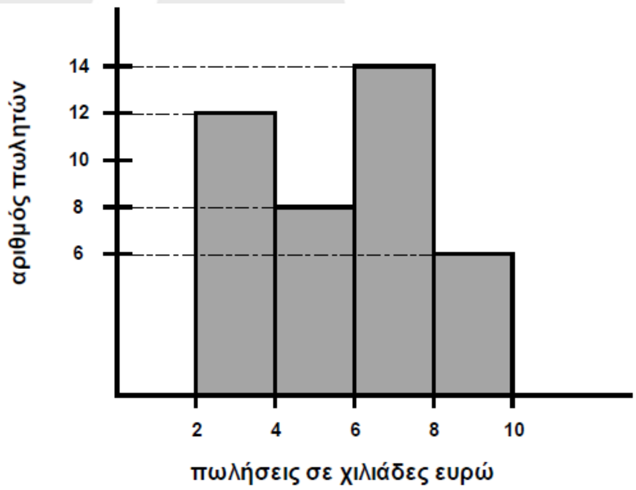
Α4. α) **Σωστό** β) **Λάθος** γ) **Λάθος** δ) **Λάθος** ε) **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων παίρνουμε ότι:

$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$

Άρα οι πωλητές της εταιρίας είναι $\nu = 40$.



Β2. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων συμπληρώνουμε τις κλάσεις και τις συχνότητες.

Για την κεντρική τιμή μιας κλάσης $[\alpha, \beta)$ ισχύει: $x_i = \frac{(\alpha+\beta)}{2}$ για $i = 1,2,3,4$

Για τις σχετικές συχνότητες ισχύει: $f_i = \frac{\nu_i}{\nu} = \frac{\nu_i}{40}$, για $i = 1,2,3,4$

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i
$[2, 4)$	3	12	0,3
$[4, 6)$	5	8	0,2
$[6, 8)$	7	14	0,35
$[8, 10)$	9	6	0,15
	Σύνολα	**40**	**1**

Β3. α) Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i = \frac{1}{40}(3 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 6) = \frac{228}{40} = 5{,}7$$

β). Έστω y το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις στο διάστημα $[4{,}5\ ,\ 6)$ σε χιλιάδες ευρώ. Εφόσον οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση έχουμε:

$$\frac{6 - 4{,}5}{6 - 4} = \frac{x}{\nu_2} \Leftrightarrow x = 6$$

$\nu_3 + \nu_4 = 14 + 6 = 20$ πωλητές έκαναν πωλήσεις στο διάστημα $[6{,}10)$.

Άρα $6 + 20 = 26$ έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με
$f'(x) = \left(4 \cdot x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1\right)' = 12x^2 - 7x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{4},\ \ x_2 = \frac{1}{3}$, αφού $x_1 < x_2$.

Επομένως, κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων:

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Τελικά, προκύπτει ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = \frac{1}{4}$ οπότε: $P(K) = \frac{1}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = \frac{1}{3}$ οπότε: $P(A) = \frac{1}{3}$.

Από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων ισχύει:

$$P(K \cup A \cup \Pi) = P(\Omega) \Leftrightarrow P(K) + P(A) + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow P(\Pi) = \frac{5}{12}$$

Γ2. Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα K, A, Π είναι ανά δύο ασυμβίβαστα.

Για το ενδεχόμενο Γ έχουμε:

$$P(\Gamma) = P(K \cup A) = P(K) + P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Για το ενδεχόμενο Δ έχουμε:

$$P(\Delta) = P\big((K \cup A)'\big) = 1 - P(K \cup A) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

Για το ενδεχόμενο E έχουμε:

$$P(E) = P(A \cup \Pi') = P(A) + P(\Pi') - P(A \cap \Pi') = P(A) + 1 - P(\Pi) - P(A - \Pi)$$

$$= P(A) + 1 - P(\Pi) - P(A) + P(A \cap \Pi) = 1 - P(\Pi) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

β' τρόπος (χωρίς χρήση κανόνων λογισμού πιθανοτήτων):

$$P(E) = P(A) + P(K) = \frac{7}{12}$$

Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα Γ και Ε είναι ίσα.

Γ3. Ισχύει:

$$N(\Pi) = N(A) + 4 \Leftrightarrow \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(\Pi) = P(A) + \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{4}{N(\Omega)}$$

$\Leftrightarrow N(\Omega) = 48$ μπάλες έχει το δοχείο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν το μήκος του κουτιού είναι x και το πλάτος του κουτιού είναι y, τότε από το γεγονός ότι η περίμετρος είναι 20cm έχουμε: $2x + 2y = 20 \Leftrightarrow y = 10 - x$

Η συνολική επιφάνεια του κουτιού προκύπτει ως το άθροισμα των επιφανειών της βάσης, που έχει εμβαδό: $x \cdot y = x(10 - x)$ και των πλαϊνών εδρών που είναι ανά δύο ίσες και έχουν εμβαδό: $5 \cdot x$ και $5 \cdot y = 5(10 - x)$ αντίστοιχα.

Οπότε: $E(x) = x(10 - x) + 2 \cdot 5 \cdot x + 2 \cdot 5(10 - x) = -x^2 + 10x + 100$, με $0 < x < 10$.

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ με $E'(x) = -2x + 10$

Λύνουμε: $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ και κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας ακροτάτων:

x	0		5		10
$E'(x)$		+	0	−	
E		$\nearrow$		$\searrow$	

Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5$, άρα το κουτί έχει για $x = 5$ μέγιστη επιφάνεια.

Δ2 α. Η εξίσωση $2s^2-5s+2=0$ έχει λύσεις: $s=2$ ή $s=\frac{1}{2}$

Γνωρίζουμε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, επομένως:

$$CV>10\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}}>\frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s}{8}>\frac{1}{10} \Leftrightarrow s>\frac{4}{5}$$

Οπότε, δεκτή λύση είναι η $s=2$.

Δ2 β. Η διακύμανση δίνεται από τον τύπο

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i{}^2-\frac{(\sum_{i=1}^{\nu} t_i)^2}{\nu}\right\} \Leftrightarrow s^2=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i{}^2-\left(\frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15}\right)^2 \Leftrightarrow s^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2$$

$\Leftrightarrow 4=\overline{x^2}-64 \Leftrightarrow \overline{x^2}=68$

Δ3. Από το ερώτημα Δ1 η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[5,10)$ και επειδή $x_1<x_2<\cdots<x_{15}$ παίρνουμε: $E(x_1)>E(x_2)>\cdots>E(x_{15}) \Leftrightarrow y_1>y_2>\cdots>y_{15}$.

Για το εύρος είναι: $R=y_1-y_{15}=E(5)-E(9)=125-109=16.$

Για το ενδεχόμενο B είναι:

$$y_i>-4x_i+9\,R+1 \Leftrightarrow -x_i^2+10x_i+100>-4x_i+144+1$$

$$\Leftrightarrow -x_i^2+14x_i-45>0 \Leftrightarrow x_i^2-14x_i+45<0$$

$\Leftrightarrow 5<x_i<9$

Άρα: $i=2,3,\dots 14$ και $B=\{A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3),\dots,A_{14}(x_{14},y_{14})\}$ από το

$\Omega=\{A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),A_3(x_2,y_2),\dots,A_{14}(x_2,y_2),A_{15}(x_{15},y_{15})\}$

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα παίρνουμε:

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{13}{15}$$

Επιμέλεια:
Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής, Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Ηρώ Μαρκάκη